감쇠진동과 강제진동

1. 실험 목적

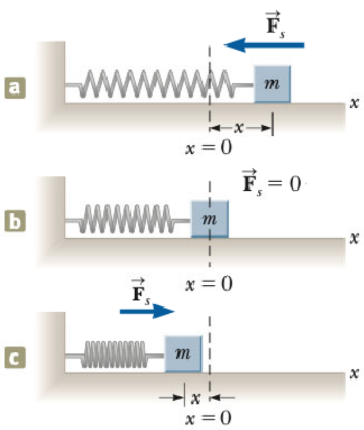
스프링에 연결된 카트의 운동을 통해 진동을 관찰하고 조화 운동을 이해한다.

2. 이론

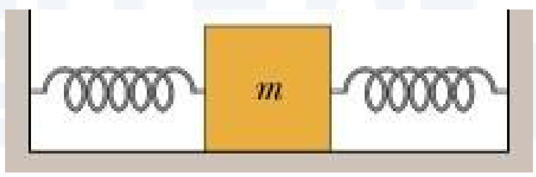
변위가 시간에 대한 사인 또는 코사인함수로 표현되는 진동을 조화운동이라고 부른다. 일반적으로 물체에 변위를 주었을 때 그 변위에 비례하는 크기의 **복원력**이 작용하면 물체는 조화 운동을 하는데, 탄성체의 역학적 진동 또는 전자기파가 대표적 예시이다. 그러나 실제로 존재하는 진동체에서는 대부분의 경우 변위에 대한 복원력이 변위에 정확히 비례하지 않으므로 완전한 조화운동이 아닌 경우가 많다.

아래에서 조화 운동을 단조화 운동, 감쇠 진동, 강제 진동으로 나누어 살펴본다.

2.1 단조화 운동



[그림 1] 단조화 운동하는 물체



[그림 2] 장치 개요

[그림 1]과 같이 스프링 끝에 매달린 물체를 잡아당겼다가 놓으면(a) 물체는 용수철의 원래 길이를 평형점으로 하여(b) 좌우로 진동한다(c). 만약 물체에 작용하는 마찰력이 없다면 물체는 단조화진동(simple harmonic oscillation)한다. 가속도가 항상 위치에 비례하고 평형위치로부터의 변위와 반대 방향으로 향하면, 그 물체는 단조화 운동을 하게 된다.

[그림 2]는 이번실험의 장치를 간략히 그린 것이다. 여기서 카트의 질량을 m, 카트의 양쪽에 달린 스프링의 힘상수를 각각 k_1, k_2라 하고, 물체를 평형 위치에서 x만큼 늘렸을 때 카트가 받는 복원력은

$$F = -(k_1 + k_2)x = -k'x \tag{1}$$

이다. 이 법칙을 **훅의 법칙**이라 한다. 뉴턴의 제2법칙에 의해서

$$F = ma = -k'x \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -k'x \tag{2}$$

의 운동방정식을 얻을 수 있다. 이 이차 미분방정식에서 x는 두 번 미분했을 때 자기 자신의 반대 부호가 나오므로 삼각함수를 이용하여

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{3}$$

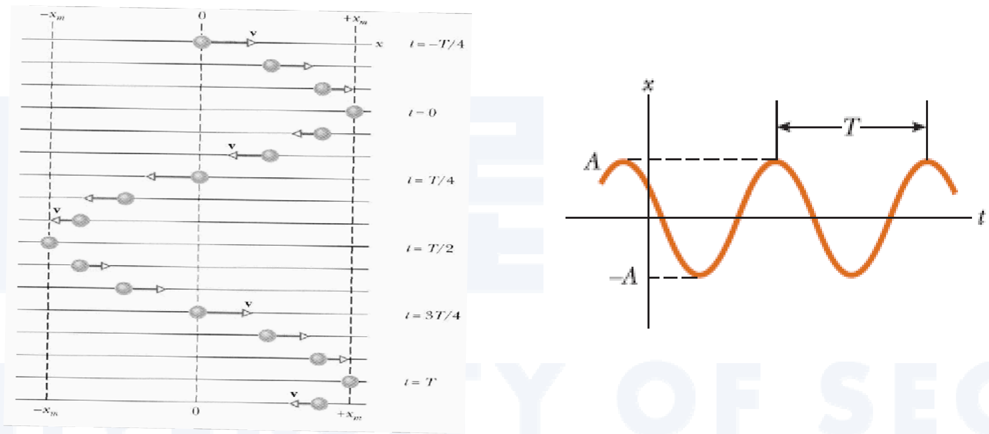
의 일반해로 서술할 수 있다. 식 (3)을 식 (2)에 대입하면 ω를 결정할 수 있으며

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} \tag{4}$$

이고, 진동하는 물체의 각진동수라고 부른다. A는 진폭(amplitude), ϕ는 위상상수(phase constant)라고 부른다. 진폭과 위상 상수는 $t=0$에서 물체의 위치와 속도에 의하여 결정된다. 물체가 한 단위의 운동을 마치는 데 걸리는 시간을 주기라고 부르며

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{5}$$

의 관계를 갖는다. 여기서 f는 진동수(frequency)로서 단위 시간 동안 단조화 운동을 하는 횟수를 말한다. [그림 3]은 단조화 운동에 대한 위치를 시간의 함수로 표현한 그래프이다.



[그림 3] 단조화운동의 예와 시간-위치 그래프

2.2 감쇠 조화 진동

단조화 운동은 이상적인 계, 즉 선형 복원력의 작용하에 무한히 진동 하는 계를 다룬다. 그러나 실제의 경우에는 마찰 또는 공기 저항 같은 비보존력이 작용하므로 계의 역학적 에너지는 시간이 지남에 따라 감소한다. 이런 경우 운동이 감쇠된다고 말한다. 흔한 형태의 저항력(retarding force)은 속력에 비례하며 운동 반향과 반대방향으로 작용한다. 저항력은 $\vec{R} = -b\vec{v}$(여기서 b는 감쇠 계수로서 상수이다)로 표현될 수 있으며, 계의 복원력은 $-k'x$이

므로 뉴턴의 제 2법칙으로부터

$$F = -k_1 x - k_2 x - bv = -(k_1 + k_2)x - bv = -k'x - bv \tag{6}$$

이다. 여기에 속도와 가속도를 미분 식으로 치환하면

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k'x = 0 \tag{7}$$

이 된다. 여기에서 구체적인 수학적 표시는 생략하기로 하고, 해를 제시하면

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega t + \phi) \tag{8}$$

의 형태가 되며, 여기서 진동의 각진동수는

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{9}$$

이다. 여기서 $\omega_0 = \sqrt{k'/m}$ 는 저항력이 없을 때의 각진동수를 나타내는 자연 진동수 (natural frequency)이다.

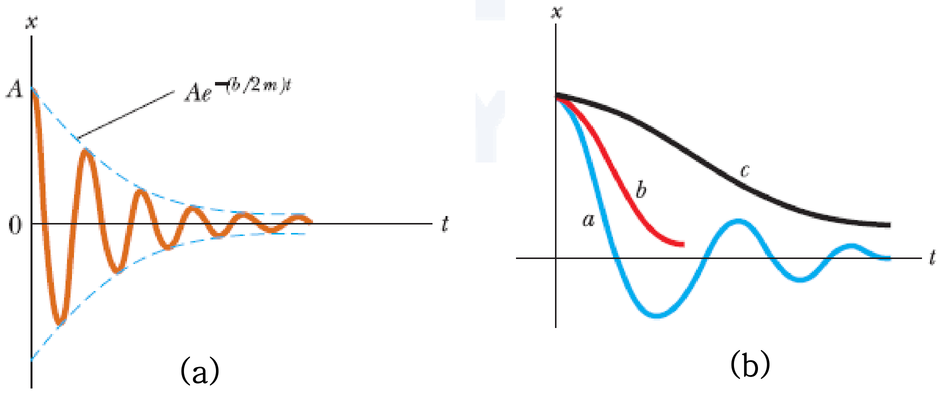
이 때 감쇠 진동하는 $x(t)$의 그래프는 저항력의 크기에 따라서 [그림 4]의 (b)와 같이 세 가지의 운동 특성을 보이게 된다.

(i) 저항력이 복원력보다 작을 때($b/2m < \omega_0$) : 저감쇠

(ii) 저항력의 b가 $b_c/2m = \omega_0$인 임계값에 도달할 때($b/2m = \omega_0$) : 임계감쇠

(iii) 저항력이 복원력보다 클 때($b/2m > \omega_0$) : 과감쇠

예를 들어 (i) 저감쇠의 경우, 운동의 진동 특성은 보존되지만, 진폭은 시간에 따라서 지수적으로 줄어들며, 운동은 궁극적으로 측정이 안될 만큼 작아지게 된다[그림4-(a)]. 이런 식으로 움직이는 계를 감쇠 진동자(damped oscillator)라고 한다.



[그림 4] (a) 감쇠 진동자의 변위 대 시간의 그래프. (b) 저항력에 따른 감쇠 진동의 유형(a: 저감쇠, b: 임계 감쇠, c: 과감쇠)

2.3 강제 진동

비보존력에 의해 에너지 총량을 잃는 감쇠 진동자에서 계에 양(+)의 일을 하는 외력을 가함으로써 에너지 손실을 보상하는 것이 가능하다. $F(t)=F_0\sin\omega t$로 주기적으로 변하는 외력이 작용하는 감쇠 진동자를 고려하자. 저항력과 구동력을 모두 받는 진동자에 대하여 뉴턴의 제2법칙을 적용하면

$$F_0\sin\omega t-k'x-b\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{10}$$

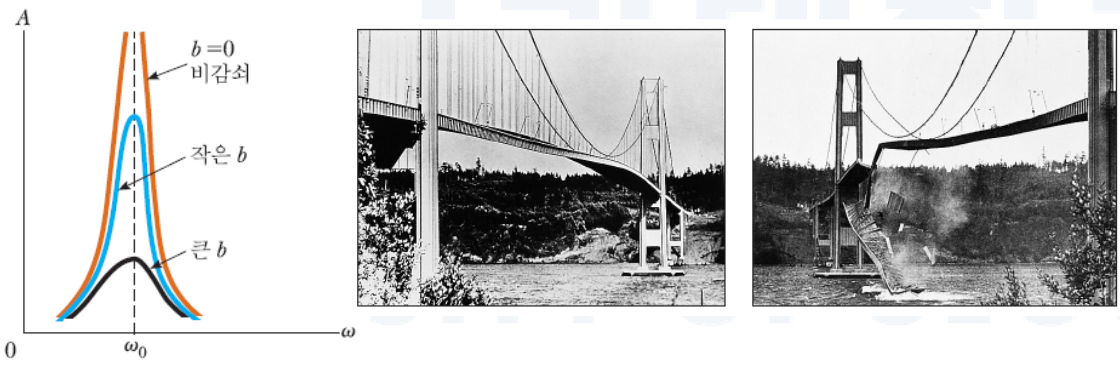
가 된다. 충분한 시간이 경과한 후, 계는 진동의 진폭이 일정하게 유지되는 정상 상태의 조건에 도달한다. 이 경우 해는

$$x=A\sin(\omega t+\phi) \tag{11}$$

의 형태로 나타낼 수 있고, 계의 각진동수는 외력의 진동수 ω와 같다. 다른 점은 외력의 진동수와 고유 진동수 및 외력의 진폭에 따라서 계의 진폭이 달라진다.

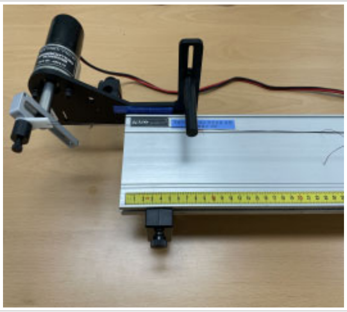
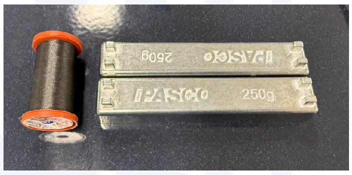
$$A=\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \tag{12}$$

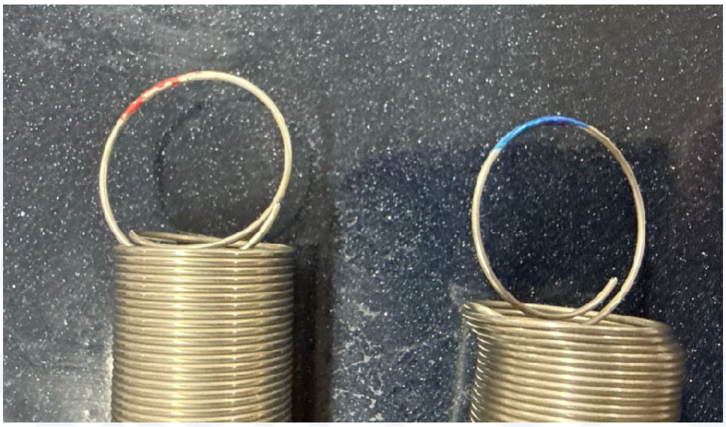
식 (12)에서 $\omega\approx\omega_0=\sqrt{\frac{k'}{m}}$ 일 때 진폭이 크게 된다. 고유 진동수 ω_0 근처에서 진폭이 급격하게 증가하는 현상을 **공진 또는 공명(resonance)**라고 한다[그림5]. 공명 상태에서 가해진 힘은 속도와 같은 위상에 있고 진동자에 전달된 일률은 최대가 된다.



[그림 5] 공명 진동수(고유 진동수) 근처에서의 진폭의 변화와, 공명 현상으로 인한 다리 붕괴의 예

3. 실험장치

		
Wireless 카트	스프링 세트 $k = 3.4$ N/m $k = 6.8$ N/m	수평 레일
		
ME-8750 Harmonic Oscillator/Driver (주파수 : 0.3~3Hz)	DC Power Supply	실과 추



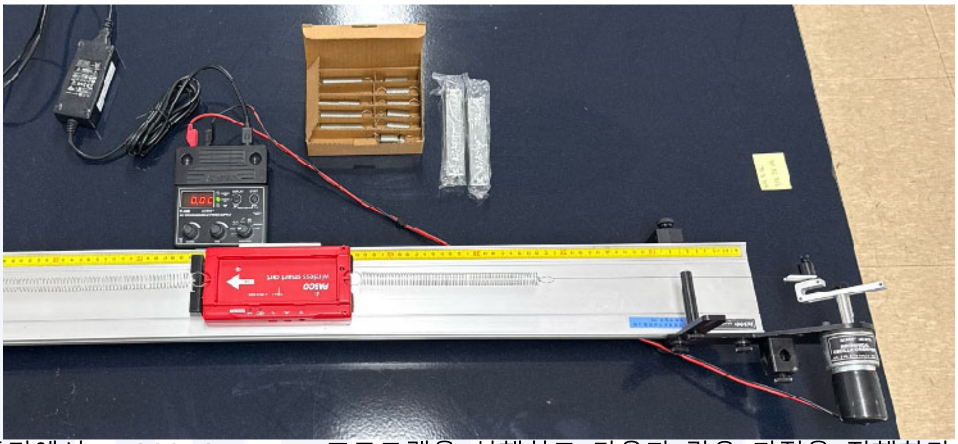
※ 용수철 상수 6.8N/m인 용수철은 위의 그림과 같이 용수철의 한 쪽 끝부분에 빨간색 혹은 파란색으로 표시되어 있고, 3.4N/m인 용수철은 아무 표시도 되어 있지 않다.

4. 실험절차

4.1 감쇠 조화 진동

(1) 중력의 효과를 배제하기 위해 수평 레일의 수평을 잡은 후, 아래 사진과 같이 카트레일에 Harmonic Oscillator/Driver와 카트를 스프링을 이용해 서로 연결한다.

** 실은 스트링 가이드 구멍에 통과시킨 다음, 스트링 홀더(흰색 판) 구멍에 묶어준다.



(2) 컴퓨터에서 PASCO Capstone 프로그램을 실행하고 다음과 같은 과정을 진행한다.

(a) 좌측 패널에서 Hardware Setup을 선택한 후 블루투스를 통해 카트를 연결한다.

(b) 우측 패널에서 Graph와 Table을 더블 클릭하여 창을 띄운 후, x축과 y축의 값을 각각 시간(Time)과 위치(Position)로 설정한다.

(c) 하단의 측정 진동수(빈도)를 충분한 값으로 설정한다(초기 20Hz).

(3) PASCO Capstone 프로그램에서 Record 버튼을 누른 다음, 카트를 정해진 진폭만큼 이동시킨 후 놓아준다.

(4) PASCO Capstone에 나타나는 그래프를 저장한 후, File -> Export Data에서 데이터도 텍스트 파일로 저장한다.

(5) 데이터 및 그래프로부터 주기 1(T_1), 주기 2(T_2), 주기 3(T_3) 및 평균 주기(T)를 결정하고, 진동수 f와 각진동수 ω를 계산한다.

** 시간에 따른 진폭의 변화 그래프를 curve fitting하여 저항력의 계수 b값을 결정할 수도 있다.

(6) 초기 진폭을 달리 하여 실험을 반복한다.

(7) 카트 위에 추를 올려 카트의 질량을 변화시키며 실험을 반복한다.

(8) 힘상수가 다른 용수철로 바꾸어 달고, 초기 진폭과 카트의 질량을 달리하며 실험을 반복한다.

(9) 각각의 실험에서 구한 각진동수와 주기를 이론값과 비교한다.

4.2 강제 진동

(1) 감쇠 진동 실험 세팅에서, Harmonic Oscillator/Driver에 DC Power Supply를 연결한다.

** DC Power supply가 인가하는 전압이 증가하면 harmonic oscillator의 주파수가 증가한다.

(2) 공진 진동수에서 진폭이 너무 커져 수평레일 바깥으로 카트가 튕겨나가는 것을 막기 위해, 구동장치에 연결된 막대의 길이를 조정하여 식 (10)의 F_0를 변화시킨다.

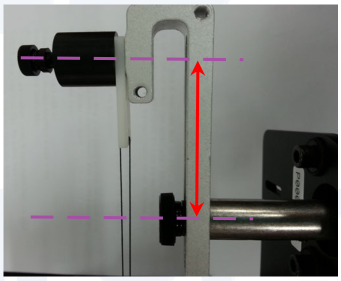
** 막대의 길이가 길면 F_0가 커져서 진폭도 커진다.

(3) 카트가 정지한 상태에서 단진동 구동장치의 전원을 켜고 진동 주파수를 천천히 올려 준다. 왼쪽 다이얼은 1.0의 단위로, 가운데 다이얼은 0.01의 단위로 변한다.

** 구동장치에 나타나는 숫자는 주파수가 아니라 주파수에 비례하는 값이다.

** Function 다이얼을 다른 모드로 놓으면 모터가 회전하지 않는다.

(4) 전압을 조절하며 운동을 관찰하여 카트의 운동 범위(진폭)가 최대가 되는 전압을 어느 정도 파악한다.



** 운동 범위가 레일을 벗어나면 강제진동의 진폭(막대의 길이)을 수정한다.

(5) PASCO Capstone을 통해 카트 운동의 진폭과 그 때의 진동수를 측정하여 표에 정리한다.

(6) 카트의 진폭이 최대가 되는 공진 진동수를 결정하고 계의 고유 진동수($\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$)와 비교한다.

서울시립대학교 UNIVERSITY OF SEOUL

5. 측정 결과

학과/분반		실험 일시	
실험 조		작성자	

5.1 카트 질량(추 포함)의 변화

5.1.1 m= ________kg (추가 추 없음)

회	용수철 힘상수 k'(N/m)	초기진폭 $A(cm)$	주기1 $T_1(s)$	주기2 $T_2(s)$	주기3 $T_3(s)$	평균 주기 $T(s)$	진동수 $f(Hz)$	각진동수 $\omega=2\pi f$ (rad/s)	고유 진동수 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}$
1										
2										
3										
4										

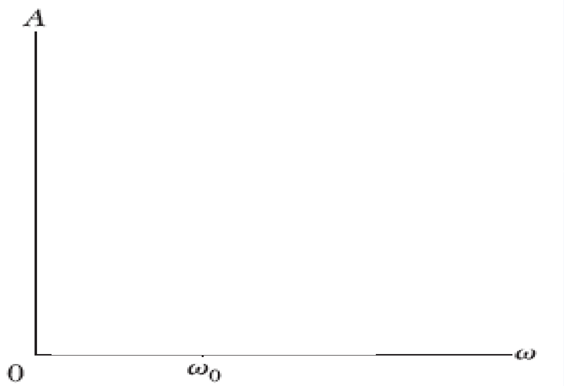
5.1.2 m= ________kg (추가 추 포함)

회	용수철 힘상수 k'(N/m)	초기진폭 $A(cm)$	주기1 $T_1(s)$	주기2 $T_2(s)$	주기3 $T_3(s)$	평균 주기 $T(s)$	주파수 $f(Hz)$	각진동수 $\omega=2\pi f$ (rad/s)	고유 진동수 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}$
1										
2										
3										
4										

5.2 주파수에 따른 강제진동 진폭의 변화

V										
ω(rad/s)										
진폭(cm)										

강제진동 - 주파수 대 진폭의 관계



6. 고찰 사항

※ 고찰 사항의 질문에 답하는 것이 보고서의 전부가 아닙니다. 여기에 있는 질문은 단지 보고서를 작성할 때 도움을 주기 위한 것입니다.

(1) 카트의 질량, 진폭 및 용수철의 힘상수가 변화할 때 계의 주기(또는 진동수)는 어떻게 변하는가?

(2) 감쇠 조화 진동에 대한 실험 결과의 마지막 열에서 구하는 $\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}$ 은 무얼 나타나는가? 이론 부분의 식을 검토하여 생각해보시오.

(3) 강제 진동에서 드라이버의 주파수 변화에 따라서 무엇이 변하고 무엇이 일정한가? 이로부터 공명 현상에 기여하는 것은 무엇인가? 주위에서 공명 현상을 이용하는 예에는 어떤 것이 있는가?