

관성 모멘트 측정

1. 실험 목적

회전축에 대한 물체의 관성 모멘트(또는 회전관성)를 실험적으로 측정하고 이론적인 값과 비교하여 관성 모멘트를 이해한다.

2. 이론

2.1 관성 모멘트(회전관성)의 정의

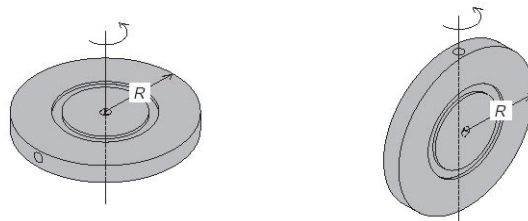
크기를 고려해야 하는 물체에 힘이 작용하면 병진운동만 유발하는 것이 아니라 회전운동도 유발하게 된다. 힘이 물체에 대해 회전운동을 유발하는 효과를 힘의 모멘트(Moment of Force) 또는 돌림힘(토크, torque)라고 하며, 이 경우에 병진운동에서 관찰되는 관성과 유사하게 회전운동에 관한 관성을 생각할 수 있다. 이러한 회전운동에 관한 관성을 관성 모멘트(Moment of Inertia) 또는 회전관성이라고 부른다.

회전 운동에서의 관성 모멘트는 병진 운동에서의 질량과 같은 역할을 한다. 관성 모멘트는 회전 운동에 변화를 줄 때 물체가 저항하는 정도이다. 이 저항은 물체의 질량뿐만 아니라, 회전축 주위로 질량이 어떻게 분포하는지에 의존한다. 즉, 관성 모멘트는 대응하는 개념인 질량과 같이 스칼라량이지만 동일한 물체의 경우에도 회전에 대한 배치에 따라 다른 값을 갖는다. 물론 회전축의 배치가 정해진 후에는 상수로 취급할 수 있다. 물체에 돌림힘이 작용하면 회전운동에 대한 뉴턴의 제 2법칙에 따라 알짜 돌림힘에 비례하고 관성 모멘트에 반비례하는 각가속도가 생긴다.

물체가 어떤 축을 중심으로 회전할 때의 관성 모멘트 I 에 대한 이론적인 식은

$$I = \int r^2 dm \quad (1)$$

로 주어진다. 이 식을 사용하여 [그림 1]에 주어진 물체의 관성 모멘트를 구해보면 다음과 같다.



원반 중심에 수직한 축

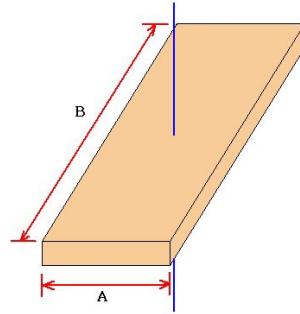
원반에 평행한 축

[그림 1] 원반 모양의 강체

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (\text{원반 중심에 수직한 축}) \quad (2)$$

$$I = \frac{1}{4}MR^2 \quad (\text{원반에 평행한 축}) \quad (3)$$

여기서 M 은 물체의 질량이고 R 은 물체의 반지름이다.

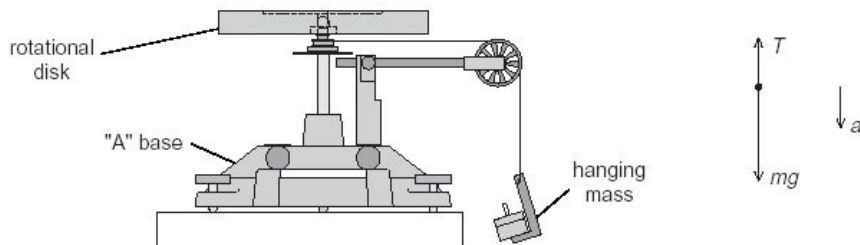


[그림 2] 직사각형 막대

[그림 2]와 같은 막대를 중심에 수직한 축에 대해 막대를 돌렸을 때의 관성 모멘트는

$$I_{\text{rod}} = \frac{1}{12}M(A^2 + B^2) \quad (4)$$

이 된다.



[그림 3] 실험 장치의 개요

[그림 3]은 회전관성을 실험적으로 구하기 위한 실험 장치의 개요이다. 추걸이 위에 추를 올려놓았을 때, 질량이 m 인 입자(추걸이+추)에 작용하는 힘에 의한 운동방정식은 다음과 같다.

$$mg - T = ma \quad (5)$$

또한 회전축에 대하여 회전하는 물체(원반)가 받는 돌림힘은 다음과 같다.

$$\tau = I\alpha \quad (6)$$

여기서 α 는 물체의 각가속도로 $a = \alpha r$ 의 관계를 갖는다. [그림 3]에서 τ 는 실에 매달린 추에 의해 발생하는 돌림힘이 되므로, 알짜 돌림힘을 받는 물체(원반)에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\sum \tau = rT = I\alpha \tag{7}$$

여기서 r 은 실이 감겨있는 풀리(pulley)의 반지름이며, T 는 장치가 회전할 때 실에 생기는 장력이다. 식 (5)와 (7)에서 T 를 소거하고, $a = \alpha r$ 을 이용하 가속도는 다음과 같다.

$$a = \frac{mg}{\frac{I}{r^2} + m} \tag{8}$$

또, 물체가 가속도 a 로 낙하할 때, t 초 동안 낙하한 거리 h 는 초속도를 0으로 잡는다면,

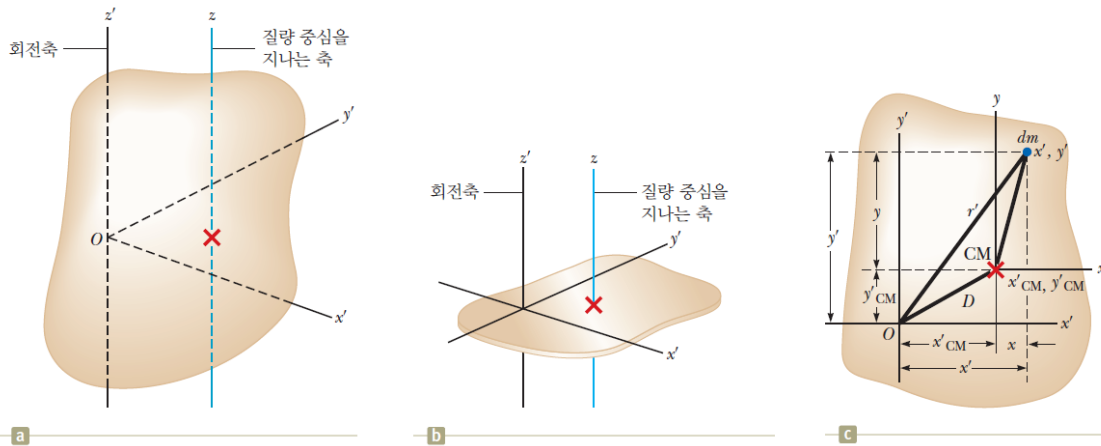
$$h = \frac{1}{2}at^2 \tag{9}$$

이 된다. 식 (8), (9)를 이용하면 관성 모멘트 I 는 다음과 같다.

$$I = mr^2 \left(\frac{g}{2h}t^2 - 1 \right) \tag{10}$$

즉, 추가 낙하하는 거리와 시간을 측정하면 관성모멘트를 실험값을 얻을 수 있다.

2.2 관성 모멘트의 평행축 정리



[그림 4] 질량 중심을 지나는 축(z) 과 z' 축에 대하여 회전하는 물체에 대한 관성모멘트

물체의 질량중심을 지나는 축에 대한 관성 모멘트 I_{CM} 과 그와 나란한 다른 축에 대한 관성 모멘트 I 사이에는 다음과 관계가 성립한다. 이를 관성 모멘트의 평행축 정리라고 한다.

$$I = I_{CM} + MD^2 \tag{11}$$

여기서 M 은 물체의 총질량이고, D 는 회전축에서 질량중심까지의 거리이다.

2.3 관성 모멘트의 수직축 정리

원점 O 에서 만나는 수직인 세 회전축 x, y, z 축에 대하여, z 축에 수직인 $x-y$ 평면 위의 평면판을 고려하자. 각각의 축을 회전축으로 하는 평면판의 관성 모멘트를 I_x, I_y, I_z 라고 할 때, 식 (1)에 의하여 I_z 는 다음과 같이 표현된다.

$$I_z = \int (x^2 + y^2)dm = \int x^2dm + \int y^2dm = I_x + I_y \quad (12)$$

즉, 임의의 평면판의 관성 모멘트는 그 수직축과 평면판의 교점을 지나고 평면판에서 서로 수직인 임의의 두 축에 대한 관성 모멘트의 합과 같다. 이 정리를 수직축 정리라 한다. 2.1에서 원반 중심에 수직인 축에 대한 관성모멘트는 식 (2)로, 이 축에 의한 관성 모멘트를 I_z 라 하면 I_x, I_y 는 각각 원반 중심을 지나며 원반에 평행한 축에 대한 관성모멘트를 나타낸다. 원반 중심을 지나며 원반에 평행한 축은 어느 방향에 대해서든 같은 값을 가지므로 $I_x = I_y$ 임을 알 수 있고, 식(12)로부터 식(3)의 값을 얻을 수 있다.

3. 실험장치

		
A-스탠드	원반	회전막대
		
추와 추걸이	어댑터	초시계
		
수준기(수평계)	버니어캘리퍼스	전자저울

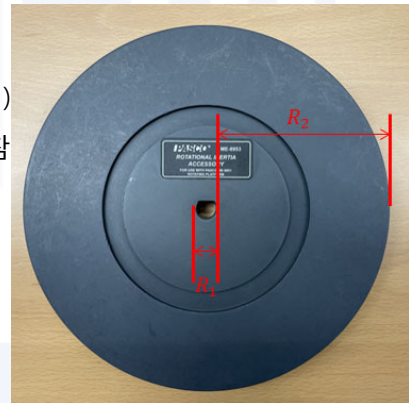
4. 실험절차

(1) 회전축의 관성 모멘트 측정

- 회전축을 수직으로 세우고 회전막대를 설치한 후 수준기를 이용하여 수평을 확인하고 회전막대를 제거한다.
- A-스탠드의 회전축에 있는 풀리(pulley)에 실을 가지런하게 감는다.
- 실을 감은 풀리의 지름($2r$)을 버니어캘리퍼스를 이용하여 측정한다.
- 스탠드에 감긴 실의 반대쪽 끝에 추걸이와 추를 연결하고, 자를 이용하여 지면으로부터 추걸이의 가장 밑바닥 면까지의 높이(h)를 측정한다.
- 초시계를 준비하고, 회전축을 잡고 있던 손을 놓음과 동시에 초시계의 시작버튼을 눌러 추가 떨어지는 시간을 측정한다.
- 추와 추걸이의 질량(m)을 측정하고 식 (10)을 이용하여 회전축의 관성모멘트 I_{axis} 를 결정한다.

(2) 원반의 관성 모멘트 측정

- 버니어캘리퍼스를 이용하여 원반 구멍의 내경(R_1)과 원반의 외경(R_2)을 측정하고, 오른쪽 그림을 참고하여 원반의 반지름 $R = R_2 + \frac{R_1}{2}$ 를 계산한다.



- 원반의 질량을 측정한 후, 원반을 회전축에 끼워 넣는다. 이 때 수준기를 올려놓고 A-스탠드의 밑에 있는 나사를 이용하여 원반의 수평을 맞춘다.

**** 이 때 오른쪽 그림과 같이 원반을 회전축에 꽉 끼도록 조여 주지 않으면 회전축과 원반이 같이 돌지 않고 헛돌 수 있다.**



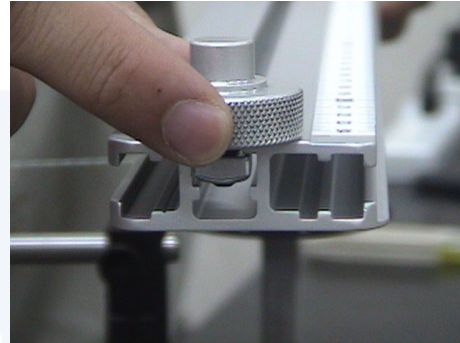
- 회전축에 실을 가지런하게 감고 반대쪽 추걸이에 추를 연결한다.
- 지면으로부터 추걸이 밑바닥면까지의 높이를 자를 이용하여 측정한다.
- 초시계를 이용하여 추가 떨어지는 시간을 측정한다.
- 식 (10)을 이용하여 관성 모멘트 I_1 을 구한다. 그러면 원반의 관성모멘트는 다음과 같다.

$$I_{disc} = I_1 - I_{axis}$$

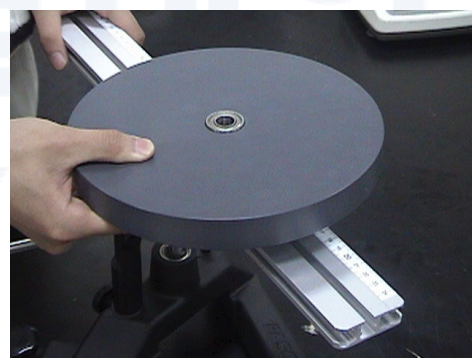
- (g) 이번에는 원반을 세워서 회전축에 설치하고, 회전축에 실을 가지런하게 감고 다시 지면으로부터의 높이를 잰 후에 초시계를 이용하여 추가 떨어지는 시간을 측정한다.
- (h) 식 (10)을 이용하여 관성 모멘트 I_2 를 구한다. 그러면 세워진 원반의 관성모멘트는

$$I_{disc,ver} = I_2 - I_{axis}$$

(3) 관성 모멘트의 평행축 정리 실험



- (a) 회전 막대를 A-스탠드에 설치하고, 수준기를 이용하여 막대가 수평인지 확인한다.
- (b) 회전 막대의 한 쪽에 어댑터를 설치하고, 회전 막대에 0점에서 어댑터 중심부까지의 거리(식 (11)의 평행축정리에서 D 에 해당하는 값)를 측정한다.
**** 어댑터의 위치가 원점에서 너무 멀리 떨어지면 실험 중에 A-스탠드가 흔들려 제대로 된 측정이 어렵다. D 의 값이 10 cm가 넘지 않도록 주의한다.**
- (c) 축에 실을 가지런하게 감고 지면으로부터 추걸이의 높이를 잰 후, 초시계를 이용하여 추가 떨어지는 시간을 측정한다.
- (d) 식 (10)을 이용하여 관성 모멘트 I_3 를 구한다. 이 때 I_3 는 회전축, 회전 막대, 어댑터의 관성 모멘트를 합한 값이다.



- (e) 어댑터의 중심에 원반을 수평으로 끼워 넣는다.
- (f) 회전축에 실을 가지런하게 감고 지면으로부터 추걸이의 높이를 잰 후, 초시계를 이용하여 추가 떨어지는 시간을 측정한다.
- (g) 식 (10)을 이용하여 관성모멘트 I_4 를 구한다. 이 때 I_4 는 회전축을 중심으로 하는 회전막대+어댑터+원반의 관성모멘트를 합한 값이다.

5. 측정 결과

학과/분반		실험 일시	
실험 조		작성자	

5.1 회전축의 관성 모멘트 $I_{axis} = mr^2 \left(\frac{g}{2h} t^2 - 1 \right)$

회	1	2	3	4	5	평균	표준오차
추(추걸이) 질량							
폴리의 ⁽¹⁾ 반지름 r							
낙하 높이 h							
낙하 시간 t							
관성 모멘트 I_{axis}							

주석 (1): 실을 감은 폴리의 반지름

5.2 원반(수평)의 관성 모멘트 $I_{disc} = mr^2 \left(\frac{g}{2h} t^2 - 1 \right) - I_{axis} = I_1 - I_{axis}$

원반의 질량 $M =$, 원반의 반경 $R =$

회	1	2	3	4	5	평균
추(추걸이) 질량						
폴리의 반지름 r						
낙하 높이 h						
낙하 시간 t						
관성모멘트 I_1						
$I_{disc} = I_1 - I_{axis}$						
이론값($\frac{1}{2}MR^2$)						
오차(%)						

5.3 원반(수직)의 관성 모멘트 $I_{disc} = mr^2 \left(\frac{g}{2h} t^2 - 1 \right) - I_{axis} = I_2 - I_{axis}$

원반의 질량 $M =$, 원반의 반경 $R =$

회	1	2	3	4	5	평균
추(추걸이) 질량						
폴리의 반지름 r						
낙하 높이 h						
낙하 시간 t						
관성모멘트 I_2						
$I_2 - I_{axis}$						
이론값($\frac{1}{4}MR^2$)						
오차(%)						

5.4 평행축 정리 실험

(1) 회전 막대 관성 모멘트 측정

회	1	2	3	4	5	평균	표준오차
추(추걸이) 질량							
풀리의 반지름 r							
낙하 높이 h							
낙하 시간 t							
관성모멘트 I_3							

(2) (회전 막대 + 원반)의 관성 모멘트 측정

원반의 질량 $M =$, 회전축에서 원반 중심까지의 거리 $D =$

회	1	2	3	4	5	평균
추(추걸이) 질량						
풀리의 반지름 r						
낙하 높이 h						
낙하 시간 t						
관성 모멘트 I_4						
$I = I_4 - I_3$						
이론값	$\frac{1}{2}MR^2 + MD^2 =$					
오차(%)						

6. 결과 분석 및 오차 논의

※ 아래의 질문에 답하는 것이 보고서의 전부는 아닙니다. 여기에 있는 질문은 단지 보고서를 작성할 때 도움을 주기 위한 것입니다.

1. 평행축 정리 실험에서 오차가 나는 원인은 무엇인가?
2. 다음 동영상을 보고 물음에 답하라 (<https://youtu.be/M6Puutlm5h4>)
 - 1) 영상 속의 사람이 팔을 벌리고 오므림에 따라 회전하는 속도가 달라지는 원인은 무엇인가?
 - 2) 이 현상과 오늘 실험과 어떤 관계가 있는가?