

운동량 보존 법칙

1. 실험 목적

두 물체의 충돌 전후에 선운동량이 보존되는지 확인하여 운동량 보존법칙을 이해한다. 또한 충돌 전후의 운동에너지가 보존되는지 확인한다.

2. 이론

두 물체가 충돌하는 과정을 생각할 때 두 물체는 서로에게 힘을 미치게 된다. 두 힘은 작용과 반작용의 관계를 갖지만, 대부분의 경우 충돌에 걸리는 시간이 매우 짧아서 힘의 크기를 측정하기가 어렵다. 또한 충돌 과정에서 받는 힘은 단순히 상대방의 질량이 큰 경우가 질량이 작은 경우보다 크다고 말할 수 없다. 질량이 작은 물체가 큰 속도로 움직이는 경우가 질량이 큰 물체가 작은 속도로 움직이는 경우에 비해 더 큰 영향을 미칠 수 있다. 이런 충돌 과정에서는 각 물체가 갖는 운동량이라는 양을 고려하는 것이 유용하다. 운동량은 물체가 갖는 질량과 속도의 곱으로 정의된다.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1)$$

운동량의 변화는 물체가 받는 알짜힘과 같다.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (2)$$

따라서 계(system)가 받는 알짜힘이 0이면 계의 운동량은 일정하다(운동량 보존법칙).

두 물체가 충돌하는 경우 두 물체를 하나의 계로 생각하면, 충돌 과정에서 두 물체가 각각 받는 힘들은 작용과 반작용의 관계에 있으므로 두 힘의 합은 0이 된다. 즉, **충돌 과정에서 충돌 직전의 전체 운동량은 충돌 직후의 전체 운동량과 같다.**

$$\frac{d}{dt}(m_A\vec{v}_A) + \frac{d}{dt}(m_B\vec{v}_B) = 0 \quad (3)$$

$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = \text{constant} \quad (4)$$

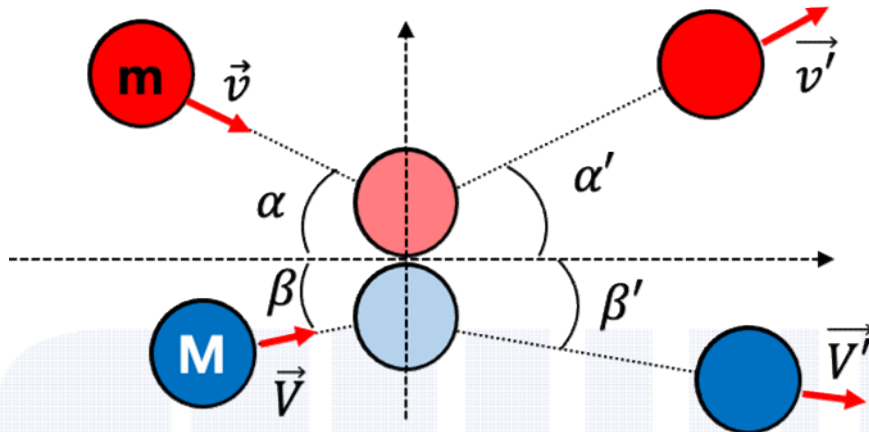
$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{u}_A + m_B\vec{u}_B \quad (5)$$

여기서 \vec{v} 는 충돌 전 속도, \vec{u} 는 충돌 후 속도를 나타낸다.

[그림 1]과 같이 질량 m 과 질량 M 이 서로 가까워져서 충돌하는 경우를 고려하자. 이 충돌 과정에서도 운동량 보존법칙이 성립하므로

$$m\vec{v} + M\vec{V} = m\vec{v}' + M\vec{V}' \quad (6)$$

위의 식을 각 성분별로 분해해도 성분별로 운동량 보존법칙이 성립하므로 아래와 같은 관계가 성립한다.



[그림 1] 충돌하는 두 물체

$$(x\text{성분}) \quad p_{xi} = p_{xf} \Leftrightarrow mv_x + MV_x = mv'_x + MV'_x \quad (7)$$

$$mv \cos\alpha + MV \cos\beta = mv' \cos\alpha' + MV' \cos\beta' \quad (8)$$

$$(y\text{성분}) \quad p_{yi} = p_{yf} \Leftrightarrow mv_y + MV_y = mv'_y + MV'_y \quad (9)$$

$$-mv \sin\alpha + MV \sin\beta = mv' \sin\alpha' - MV' \sin\beta' \quad (10)$$

두 물체 중 하나가 처음에 정지한 경우에는 움직이는 물체의 방향을 x 축으로 설정하면 (8)식과 (10)식이 훨씬 간결해진다.

3. 실험장치

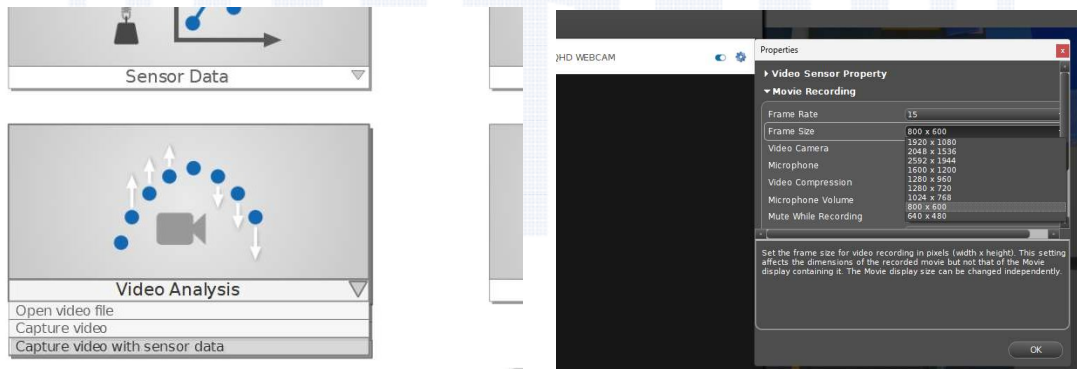
	
<p>Air Table 과 Air Blower</p>	<p>카메라</p>
	
<p>떡, 줄자, 수평계</p>	<p>PC(PASCO Capstone)</p>

4. 실험절차

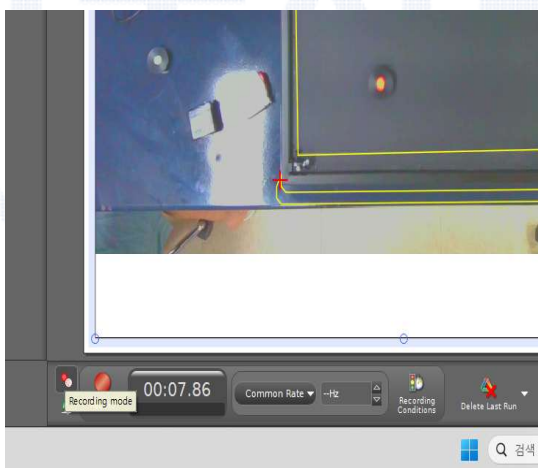
(1) PASCO 초기 설정

- (a) PASCO Capstone 프로그램을 실행한다..
- (b) 가운데 메뉴들 중 [Video Analysis] - [Capture video with sensor data]를 클릭한다.
- (c) 왼쪽 사이드바 메뉴의 [Hardware Setup]에서 톱니바퀴 모양 버튼을 눌러 [Frame Size]를 800*600 으로 설정한 후, [Frame Rate]를 "15"로 설정한다. ([그림 3] 참고)
- (d) 수평계를 이용하여 Air Table의 수평을 맞추고, 카메라 화면을 켜놓은 채로 카메라가 기울어지지 않고 Air Table을 담을 수 있도록 조정한다.

* (c)에서 [Frame Size]에 따라 가능한 [Frame Rate]이 다르므로 [Frame Size]를 먼저 조정.



[그림 3] PASCO Capstone 초기 설정



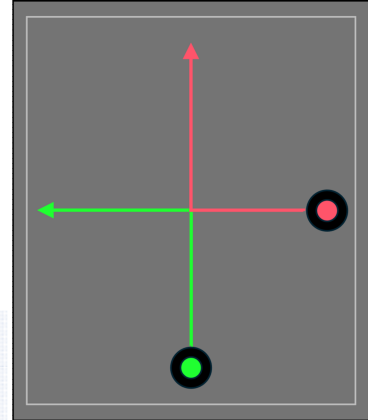
[그림 4-1] Capstone 녹화모드



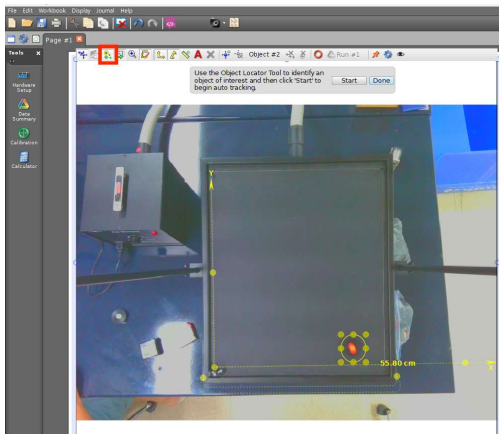
[그림 4-2] Capstone 분석모드

(2) 운동 측정 및 데이터 추출

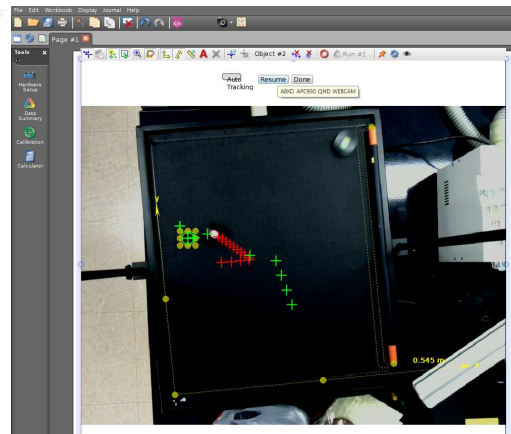
- (a) 이제 운동의 측정을 위해, Air Blower를 켜고 하단의 [Record] 버튼을 눌러 녹화를 시작하고, 두 개의 퍽을 가볍게 밀어 충돌 시킨다. **우측 그림과 같이 궤적이 십자가 형태가 되도록 두 개의 퍽을 에어테이블의 모서리 중앙에서 가볍게 밀어 충돌시킨다.** 운동이 끝나면 녹화를 멈춘다.



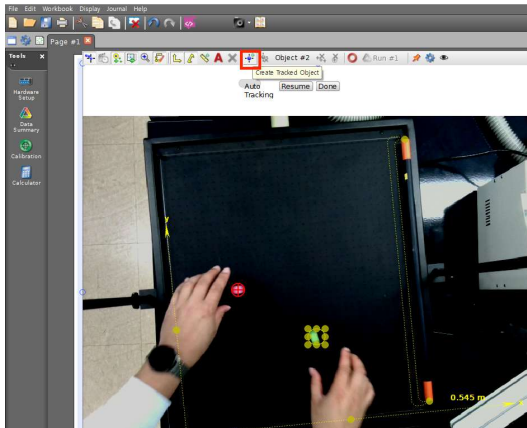
- (그림 4-1) 녹화모드 참고)
- (b) [그림 4-2]의 버튼(1번)을 눌러 분석모드를 활성화한다.
- (c) [그림 4-2]의 스케일 설정 자(2번)를 에어테이블 하단의 가로축에 맞게 조절하고 에어테이블의 하단 길이를 줄자로 측정한 값을 입력한다. 또한, x축과 y축(3번)의 방향을 적절히 조절하여 원점을 설정한다.
- (d) [그림 5-1]의 버튼(빨간박스)을 눌러 자동 트래킹을 활성화하면 나타나는 노란 원형 가이드라인을 둘 중 하나의 퍽에 맞게 움직인다. 이 때, 오브젝트의 번호를 기억해둔다.
- (e) [start] 버튼을 누르면 퍽의 움직임이 자동으로 기록된다. ([그림5-2] 참고)
- (f) 이제 남은 또 하나의 퍽을 기록하기 위해 영상의 시간을 다시 적절히 조절한 후, [그림5-3]의 버튼을 눌러 오브젝트를 추가한다.
- (g) 이전 과정에서와 같이 [그림 5-1]의 버튼을 눌러 자동 트래킹을 활성화하면 나타나는 노란 원형 가이드라인을 퍽에 맞게 움직인다. 이 때, 마찬가지로 오브젝트의 번호를 기억해둔다.
- (h) [start] 버튼을 누르면 퍽의 움직임이 자동으로 기록된다. ([그림5-4] 참고)
- (i) [그림 6]과 같이 오른쪽 사이드바에서 [Table]을 드래그하여(1번), Tab을 추가하고(2번), 각 탭에서 오브젝트 번호 선택 후, 시간, x , y 좌표(3번)를 선택한다. 영상에서 필요한 부분의 데이터를 드래그하여 분석한다(4번).



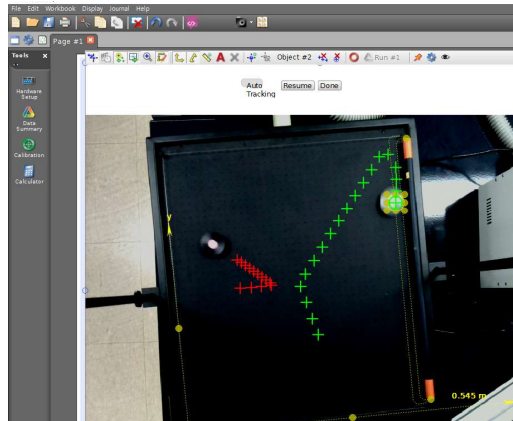
[그림 5-1] 오토 트래킹 설정



[그림 5-2] 데이터 추출



[그림 5-3] 추가 오토 트래킹 설정



[그림 5-4] 추가 데이터 추출

※유의사항: 펍 충돌시 오토트래킹이 오류를 일으킬 수 있다. 그런 경우 해당 프레임으로 돌아가서 가이드를 다시 설정해주면 깔끔한 결과를 얻을 수 있다.

Time (s)	x Object #1 (m)	y Object #1 (m)	x Object #2 (m)	y Object #2 (m)
0.14	0.27	0.28	0.32	0.31
6.633	0.20	0.29	0.28	0.31
6.833	0.21	0.32	0.27	0.31
7.033	0.20	0.34	0.29	0.32
7.233	0.19	0.37	0.30	0.33
7.432	0.19	0.40	0.33	0.34

[그림 6] 데이터 추출

(4) 충돌 전후의 운동량 비교

추출한 데이터로부터 충돌 전후의 속력을 x, y 성분별로 다음과 같이 구할 수 있다.

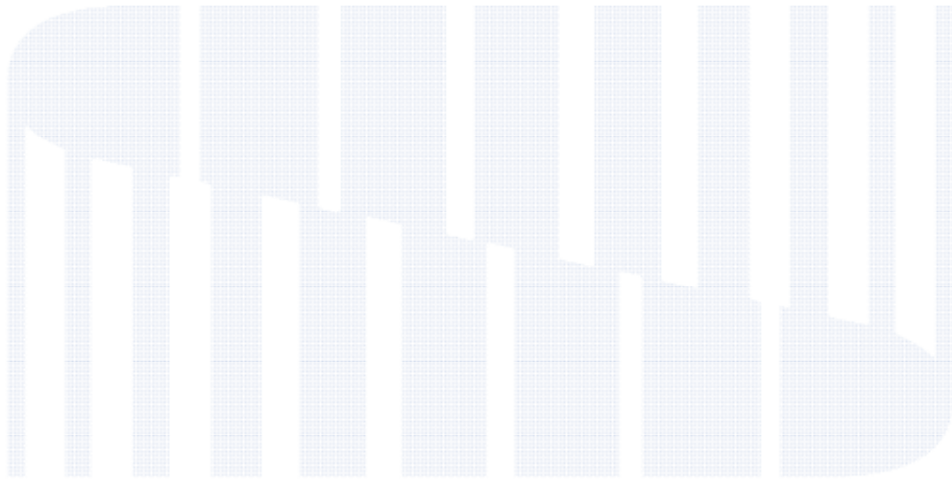
$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \quad (11)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

여기서 t_1, t_2 은 각각 데이터의 첫 번째, 두 번째 시간 기록이며, x_1, x_2, y_1, y_2 은 $t = t_1$ 또는 $t = t_2$ 에서의 x 좌표 또는 y 좌표를 의미한다.

식 (7), (9), (11)을 이용하여 x, y 성분 각각의 충돌전 운동량(p_{xi}, p_{yi})과 충돌 후 운동량(p_{xf}, p_{yf})을 얻고 이 값을 비교한다.

** 퍽 2개의 충돌 전후의 속력을 x, y 성분별로 충돌 사건 두 프레임 전에 계산한다.
예를 들어 $\Delta t = 0.2s$ 이고 충돌 시점이 $1s$ 이라면, 충돌전 운동량은 $0.4s, 0.6s$ 의 시간간격에서 평균 속력 v_x, v_y 를 얻고, 충돌후 운동량은 $1.4s, 1.6s$ 의 시간 간격에서 평균 속력 v'_x, v'_y 를 얻는다.



서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

※유의 사항

1. Air Table의 수평이 맞지 않으면 중력의 영향으로 인해 오차가 발생합니다. 수평에 맞추는 데 주의를 기울이십시오.
2. 실험이 종료된 후에는 화면을 캡처한 파일들을 갈무리한 후 컴퓨터에서 모두 삭제하십시오.

5. 측정 결과

학과/분반		실험 일시	
실험 조		작성자	

※ 충돌 과정에 대해 캡처된 화면 중 대표적인 사례를 뒤에 첨부하십시오.

회	1	2	3	4	5	평균
M=m	25g±0.2g					
v						
V						
v'						
V'						
p_{xi}						
p_{xf}						
p_{yi}						
p_{yf}						
%오차 (x 성분)						
%오차 (y 성분)						

[참고1] $p_{xi} = mv_x + MV_x$, $p_{xf} = mv_x' + MV_x'$, $p_{yi} = mv_y + MV_y$, $p_{yf} = mv_y' + MV_y'$

[참고2] %오차(x 성분) = $\frac{|p_{xi} - p_{xf}|}{p_{xi}} \times 100$, %오차(y 성분) = $\frac{|p_{yi} - p_{yf}|}{p_{yi}} \times 100$

6. 결과 분석 및 오차 논의

※ 아래의 고찰 사항의 질문에 답하는 것이 보고서의 전부가 아닙니다. 여기에 있는 질문은 단지 보고서를 작성할 때 도움을 주기 위한 것입니다.

(1) 충돌 전 전체 운동량과 충돌 후 전체 운동량은 동일한가? 즉, 운동량 보존법칙이 성립하는가?

(2) 이론적으로 운동량 보존법칙은 성립한다. 실험적으로 확인하면 정확히 보존되지 않는다. 즉, 오차가 발생한다. 오차가 발생하는 원인은 무엇인가?

(3) 충돌 전후의 각 물체의 운동에너지는 보존되는가? 보존되지 않는다면 그 이유는 무엇때문인가?