

길이 및 곡률반경 측정

1. 실험 목적

- (1) 물체를 측정하는 방법을 익힌다.
- (2) 유효숫자 및 오차와 표준오차의 개념을 이해한다.
- (3) 버니어 캘리퍼스, 마이크로미터, 구면계 등 기본적인 측정 장치의 원리를 이해한다.

2. 이론

(1) 오차

기구를 사용하여 어떤 물리량을 측정하면, 측정값(x)은 참값(t)에 가까울 뿐 참값은 아니다. 이 때, $\epsilon = x - t$, 즉 측정값과 참값의 차이를 측정 오차라고 한다. 여기서, 참값은 이론값을 의미하는 것이 아니라 해당 기구를 사용하여 무한번 측정하였을 때의 평균값을 의미한다.

(2) 유효숫자

어떤 양을 측정할 때, 측정값은 실험 오차 범위 내에서만 의미가 있다. 이런 불확실 정도는 실험 장치의 정밀도, 실험자의 기술 그리고 실험 횟수 등 여러 가지 요인의 영향을 받는다. 측정에서 유효 숫자(significant figures)의 개수는 불확실한 정도를 표현하는 데 사용된다.

(3) 대푯값

한 물리량을 N 회 측정하여 얻은 측정값 x_1, x_2, \dots, x_N 으로부터 하나의 대푯값을 정해야 할 때, 다음과 같은 값들을 사용할 수 있다. 측정값의 분포를 확인하기 위한 대푯값으로는 산술평균을 사용한다.

중앙값 (Median)	측정값을 크기순으로 나열했을 때 중앙에 위치하는 값
최빈값 (Mode)	가장 자주 나타나는 측정값
산술평균 (Arithmetical Mean)	$\bar{X} = \sum_{i=1}^N x_N / N$

(4) 측정값의 분포

이론과 달리 실험결과는 측정에 따라 달라진다. 따라서, 측정값들의 대푯값인 산술평균이 얼마나 정확한 값을 이야기해주는지 확인할 필요가 있다. 측정값의 분포로부터 통계적 방법을 활용하여 다양한 계산을 할 수 있고, 이를 통해 측정 평균값의 표준적인 오차를 계산하여 실험의 정밀도를 확인할 수 있다.

(a) 편차(Deviation, δ) : 측정에 있어서 참값을 알 수 없는 경우가 대부분이다. 이때 참값 대신 평균값을 많이 사용하고 측정값 x 에 대한 편차 δ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\delta = x - \bar{X}$$

(b) 표준 편차(Standard Deviation, σ) : 측정값의 표준편차는 편차의 대표적인 값이며, 측정기구의 정밀도와 직접적으로 관계가 있는 양으로 일반적으로 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{N}}$$

(c) 표본 표준 편차(Sample Standard Deviation, s) : 표본 표준 편차는 참값과 측정값의 차이인 오차의 대표적인 값을 의미하며 다음과 같이 정의된다.

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{\epsilon_i^2}{N}}, \quad (\epsilon_i = x_i - t, \quad t \text{는 참값})$$

그러나 참값을 모르므로 유한한 측정으로부터 직접 s 를 계산할 수 없다. 하지만 오차와 편차 사이의 관계식을 이용하여(c.f. Bessel's correction), 측정값의 편차를 통해 아래와 같이 표본표준편차 s 를 추정할 수 있다.

$$s \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{N-1}}, \quad (\delta_i = x_i - \bar{X}, \quad \bar{X} \text{는 측정값의 평균})$$

(d) 평균값의 표준오차 (Standard Error of the mean, SEM, $\sigma_{\bar{X}}$) : 어떤 물리량을 1회에 N 번씩 여러 차례 되풀이하여 측정한 측정값의 평균과 참값 사이에도 오차가 발생하는데, 이는 중심극한정리에 따라 특정 정규분포를 따르게 된다. 이를 이용하여, 측정값의 분포의 대푯값인 산술평균이 갖는 표준오차를 계산하는 식은 다음과 같다.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \simeq \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (s \text{는 표본표준편차})$$

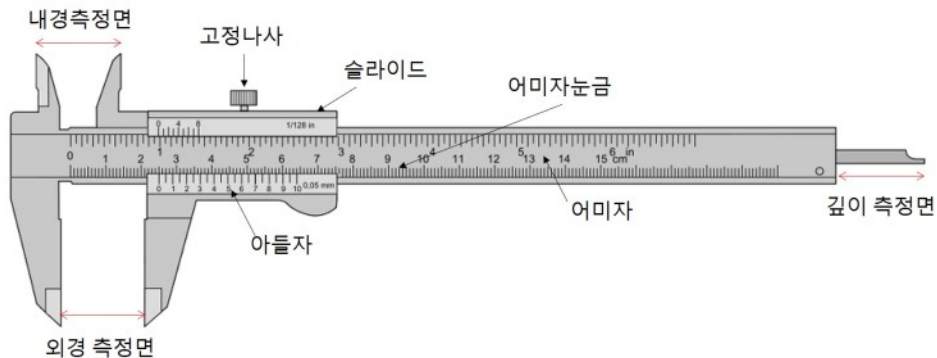
※ 오차와 편차 사이의 관계식을 포함한 오차 해석의 추가 내용은 다음 링크를 참고 → [오차론](#)

3. 실험 장치

(1) 실험 장치



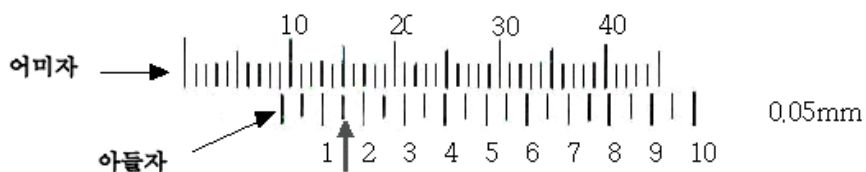
(a) 버니어캘리퍼스(Vernier Calliper)



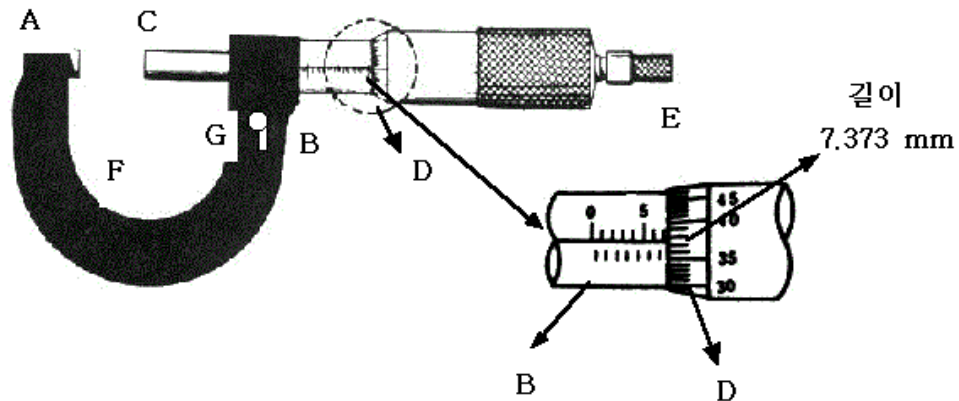
- 물체의 바깥지름(외경), 두께, 안지름(내경), 홈의 너비, 깊이 등을 정확하게 측정할 수 있는 기구

- 아들자를 이용하면 본체에 있는 어미자의 최소 눈금의 1/10 혹은 그 이상의 정밀도까지 읽을 수 있다. 아들자는 어미자의 눈금을 20등분함으로써, 어미자의 눈금보다 1/20만큼 짧은 눈금을 가진다. 따라서 어미자의 첫 번째 눈금과 아들자의 첫 번째 눈금을 일치시키면 아들자는 어미자 눈금의 1/20만큼 이동하게 된다. 이와 같은 원리로 아들자의 n번째 눈금이 어미자의 눈금과 일치하고 있으면, 어미자의 $n/20$ 눈금만큼 어미자의 눈금에 더해주어 읽는다.

예) 아래 그림에서 아들자의 0 눈금이 어미자의 9mm와 10mm 사이에 있고, 아들자의 세 번째 눈금이 어미자의 눈금과 일치하므로, $9+0.05 \times 3=9.15$ mm가 된다.

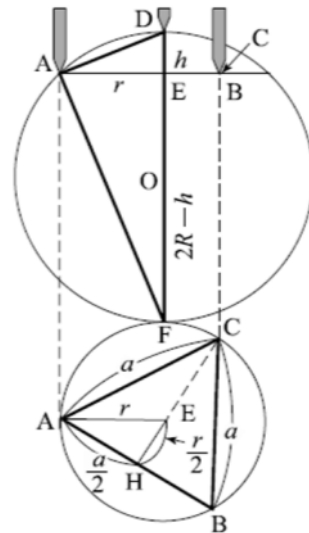
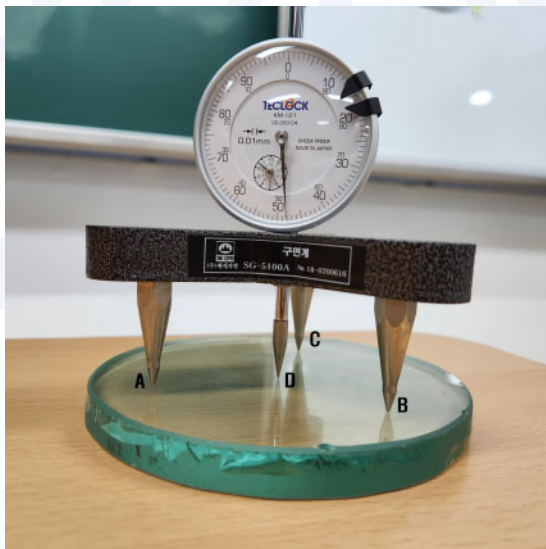


(b) 마이크로미터(Micrometer)



- 정확한 피치를 가진 나사의 회전 운동을 직진 운동으로 바꾸어 길이를 측정하는 기구
- 위의 그림과 같이 틀 F의 한쪽 면 A는 움직일 수 없도록 고정되어 있고, 반대쪽에는 안쪽이 암나사로 되어 있는 원통 소매(sleeve) B가 붙어 있다. 스크류 축(spindle) C는 원통소매 B를 관통하여 손잡이(thimble) D와 연결되어 있다. 손잡이 D를 한 바퀴 돌렸을 때 나사 축 C가 진행되는 거리를 나사의 피치라고 하는데, 대부분의 마이크로미터 나사의 피치는 0.5mm이고, 손잡이 D의 둘레에는 50개의 눈금이 있으므로 이 눈금 하나는 1/50회전(0.01mm)만큼 C를 앞으로 나아가게 한다. 따라서 손잡이 D에 표시된 한 눈금의 1/10까지 눈어림으로 읽을 수 있다면, 길이를 1/1000mm까지 측정하게 된다.

(c) 구면계(Spherometer)



- 마이크로미터의 일종이라고 할 수 있다. 위의 왼쪽 그림과 같이 틀에는 정삼각형을 이루는 세 개의 다리 A, B, C와 이 삼각형이 이루는 평면에 수직하게 틀의 중심을 관

통하는 움직이는 다리 D가 있다. 곡면에 구면계를 놓으면, 고정된 다리 A, B, C로 만들어진 평면으로부터 움직이는 다리 D의 높이를 눈금으로 읽을 수 있다. 다이얼의 바깥쪽 눈금은 1/100mm 단위로, 내부의 눈금은 1mm 단위로 읽을 수 있다. 최소 눈금인 바깥쪽 눈금의 1/10까지 눈어림으로 읽으면 1/1000mm까지 측정할 수 있게 되어 있다.

- 위의 오른쪽 그림에서 $\overline{DE}=h$, $\overline{EF}=2R-h$ 이고, $\triangle ADE$ 와 $\triangle FAE$ 는 닮은꼴이므로, $r:h=2R-h:r$ 로부터

$$r^2 = h(2R-h)$$

가 된다. $\triangle AEH$ 에서 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}=r$, $\overline{EH}=\frac{r}{2}$, $\overline{AH}=\frac{a}{2}$ 이므로, $(a/2)^2 + (r/2)^2 = r^2$ 으로부터

$$r^2 = \frac{a^2}{3}$$

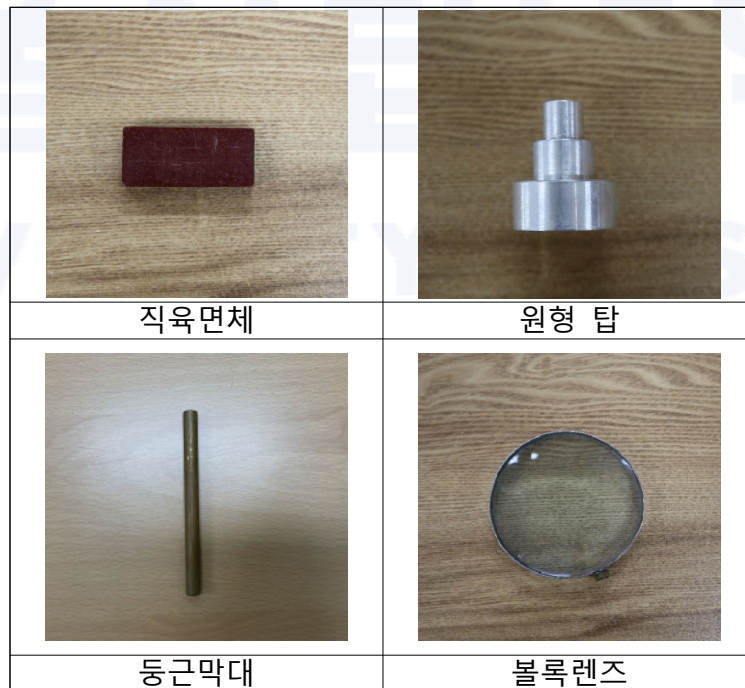
r^2 에 대한 두 식을 비교하면

$$\frac{a^2}{3} = 2hR - h^2$$

$$R = \frac{a^2}{6h} + \frac{h}{2}$$

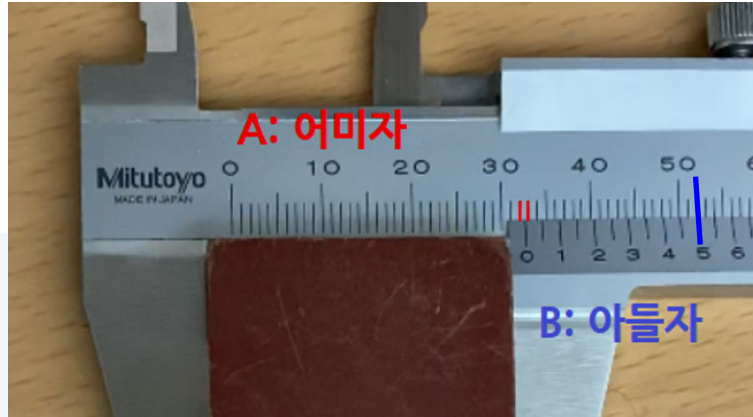
즉, 곡률반경 R 은 a 와 h 를 측정하여 구할 수 있다.

(2) 측정 시료



3. 실험절차

(1) 버니어 캘리퍼스

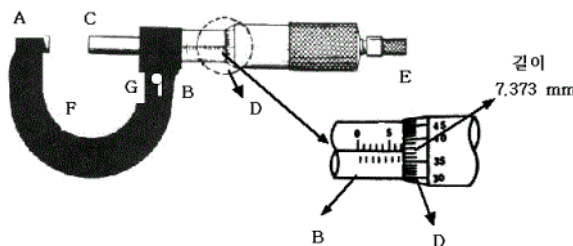


(a) 버니어 캘리퍼스의 영점을 확인한 후, 주어진 직육면체, 둥근막대, 사각막대, 원형탑의 각 부분의 길이를 차례로 10번 측정하여 평균과 표준오차를 구한다. 버니어 캘리퍼스로 길이를 측정하는 방법은 아래와 같다.

1. 어미자의 한 눈금은 1mm이고 아들자는 1/20에 해당하는 0.05mm이다.
2. 아들자의 0눈금이 가리키는 어미자의 눈금(32mm), 어미자의 눈금과 일직선이 되는 아들자의 눈금(0.50mm)을 읽는다.
3. 두 눈금값을 더한다(32.50mm)
4. 여기에서 영점값을 빼주면 실제 측정값이 된다.

(b) 측정이 끝나면 반드시 고정 나사를 죄어 아들자를 고정시킨다.

(2) 마이크로미터



(a) 잠금쇠를 푼 다음 좌측 그림의 A와 C사이에 아무 것도 끼우지 않고 E를 가만히 돌린다. A와 C가 서로 접하면 E가 헛돈다. 이때의 B와 D로 영점을 정한다.

(b) 주어진 직육면체, 둥근막대, 사각막대, 원형탑, 종이 각 부분의 길이를 10회씩 측정 후 영점값을 이용하여 보정한 후 평균과 표준오차를 구한다. 마이크로미터를 사용해 측정하는 방법은 다음과 같다.

1. 슬리브의 위쪽 눈금은 1mm, 아래쪽 눈금은 위 눈금의 중간마다 그어져 있으므로 23.5mm(그림)의 눈금을 읽는다.
 2. 심블은 50개의 눈금이 있고, 슬리브의 가로줄이 만나는 값을 읽는다. 그림에서는 심블의 42 눈금이 거의 정확하게 슬리브의 가로줄과 일치하므로 0.420mm에 해당한다. 만약 슬리브의 가로줄과 만나는 심블의 눈금이 42와 43 사이라면 0.42x mm를 눈어림으로 읽는다.
 3. 슬리브와 심블의 눈금값을 더한다(23.920mm).
 4. 이 값에서 영점값을 빼면 실제 측정값이 된다.
- (c) 측정이 끝나면 잠금쇠를 잠근다.

(3) 구면계



(a) 높이 h 측정

1. 다리D가 평평한 위치에서 위로 올라가는 경우에 안쪽 눈금은 반시계방향으로, 바깥쪽 눈금은 시계방향으로 돌아가며 이 경우 눈금에 적힌 숫자 중 큰 숫자로 읽는다. 아래로 내려가는 경우에는 반대방향으로 회전한다. 이 때는 작은 숫자로 읽는다.
2. 최소 눈금인 바깥쪽 한 눈금의 1/10까지는 눈어림으로 측정한다.
3. 위 왼쪽 그림처럼 구면계를 평면 유리판 위에 놓고 기준값(h_1)의 눈금을 읽는다. 이 값이 영점에 해당한다. 안쪽 눈금은 1과 2사이에, 바깥쪽 눈금은 48에 위치하고 있으므로 $h_1=1.480\text{mm}$ 이다.
4. 위 가운데 그림처럼 볼록렌즈 위에 구면계를 올려놓고, 높이 h_2 의 눈금을 읽는다. 이 경우 움직이는 다리 D가 올라가기 때문에, 안쪽 눈금은 4와 5사이에, 바깥쪽 눈금은 82와 83 사이에 위치한 것으로 읽는다. 바깥쪽 한 눈금을 어림으로 측정하여 $h_2=4.822\text{mm}$ 이다.
5. 높이 h 는 $h=h_2-h_1$ 로 계산할 수 있다. 이를 10회 반복하여 평균값 \bar{h} 를 구한다.

(b) 정삼각형 한 변의 길이 a 측정

1. 위 오른쪽 그림처럼 구면계를 평평한 백지 위에 놓고 가볍게 눌러 자국을 낸다.
2. 이 때 찍힌 세 점을 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 세 변의 길이(a_1, a_2, a_3)를 버니어 캘리퍼스로 측정해 평균을 낸 값을 a 로 한다.
3. 위에서 공부한 곡률 반경에 대한 식에 (a)와 (b)에서 구한 h 와 a 를 대입하여 구면경의 곡률반경 R 과 표준오차 ΔR 을 구한다.

$$R = \frac{a^2}{6h} + \frac{h}{2}$$

● 실험 예

버니어캘리퍼스로 내경 측정



버니어캘리퍼스로 두께 측정



버니어캘리퍼스로 깊이 측정



마이크로미터로 두께측정

※유의할 점

1. 모든 측정 계기에는 영(0)점이 있기 마련이다. 측정하기 전에 영점을 맞추지 않으면 측정값이 무의미해진다.
따라서 각 측정 장치로 측정하기 전에 매번 영점 조정을 해 주어야 한다. 만약 영점 조정을 할 수 없는 경우에는 영점의 값을 측정치에서 빼주어야 한다.
(예: 캘리퍼스가 이를 완전히 다물었을 때 0.05mm를 가리키고 측정값이 100mm가 되었다면 실제 측정값은 99.5mm이다.)
2. 보고서를 작성할 때는 측정회수, 평균값, 표준오차 등이 모두 나타나도록 해야 한다
3. 마이크로미터로 측정할 때 매번 힘을 가하는 힘이 달라지면 정확한 측정을 할 수 없다. 측정면이 물체에 닿을 때는 작은 나사를 돌려서 닿도록 해야 한다.

학과/분반	/	반	실험일시
실험조		이름	

4. 측정 결과

(1) 버니어 캘리퍼스 (단위: mm)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	평균값	표준차
직육면체	길이												
	너비												
	높이												
버니어 판대	지름												
	길이												
원형 판	외경												
	내경												
	깊이												
	높이												

* 직육면체의 길이, 너비, 높이를 선택하여 표기한다.

* 원형 판의 외경은 가장 작은 외경을 측정하고, 높이는 가장 낮은 높이를 측정한다.

(2) 마이크로미터 (단위: mm)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	평균값	표준오차
직육면체	높이												
둥근막대	지름												
원형타입	외경												
	높이												
종이	두께												

* 원형 타입의 외경은 가장 작은 외경을 측정하고, 높이는 가장 낮은 높이를 측정한다.

(3) 구면계 (구면계의 세 발을 A, B, C라고 하면) (단위: mm)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	평균값	표준오차
0점의 위치(h_1)												
높이 (h_2)												
실제높이 ($h_2 - h_1$)												
AB(a_1) 거리												
BC(a_2) 거리												
CA(a_3) 거리												
거리의 평균(a)												
곡률반경 [mm]												

5. 고찰할 것

(1) 버니어 캘리퍼스와 마이크로미터의 측정 분해능(resolution)은 어느 것이 얼마나 좋은지 생각하고, 어느 것이 정밀한 측정에 어울리는지 생각해보라.

(2) 측정의 정밀도(precision)는 측정치의 오차 정도를 가리키는 것으로 관측의 균질성을 나타내며, 관측된 값의 편차가 적을수록 정밀하다. 정밀도에 정확도(accuracy)는 포함되지 않으며, 일반적으로 표준편차나 상대 표준편차로 나타낸다. 정확도는 측정하거나 계산된 양이 실제값과 얼마나 가까운지를 나타내는 기준이며, 관측의 정교성이나 균질성과는 무관하다. 정밀하지만 정확하지 않은 경우와 정확하지만 정밀하지 않은 경우의 예를 생각해보라.

(3) 단순한 장치로 정밀한 측정을 하기 위해서는 어떻게 해야 하는가 ?